Unidade II - Sistemas de Equações Lineares

1- Situando a Temática

Discutiremos agora um dos mais importantes temas da matemática: Sistemas de Equações Lineares. Trata-se de um tema que tem aplicações dentro de muitas áreas do conhecimento, além da matemática.

Abordaremos o método de escalonamento na resolução de sistema linear, por acreditar que se trata da técnica mais eficaz existente. Para sistemas lineares de ordem 2x2 ou 3x3, a regra de Cramer, que exige o conhecimento prévio de determinantes, será trabalhada na próxima unidade que trata do estudo dos determinantes.

Muitos autores apresentam o conteúdo sobre determinante de uma matriz antes de discutir sistemas lineares devido ao fato, ao nosso ver, de que muitos problemas que envolvem sistemas lineares no Ensino Médio são equacionados através de sistemas lineares com no máximo de três equações e três incógnitas. Desta forma, muitos alunos ficam condicionados a trabalhar apenas sistemas 2x2 ou 3x3 e assim muitos apresentam dificuldades na resolução de problemas de sistemas lineares nos quais o número de incógnitas é diferente do número de equações.

2- Problematizando a Temática

Inicialmente iremos recorrer a um exemplo prático para mostrar o quanto são freqüentes, em nosso dia-a-dia, os sistemas de equações. Os mais comuns são os sistemas de equações lineares do 1º grau que ilustraremos com o seguinte problema:

Antes de assumir o caixa num supermercado, Maria recebe de seu gerente uma sacola contendo moedas, onde está indicado que existem 250 moedas no valor de R$40,00. Ao abrir a sacola ela percebe que existem moedas de 25 centavos e de 10 centavos. Quantas moedas de cada espécie Maria recebeu de seu gerente?

Tal problema pode ser representado pelo sistema de equações do 1º grau

$$\begin{cases} x + y = 250 \\ 0,25x + 0,10y = 40 \end{cases}$$

onde x e y são, respectivamente, as quantidades de moedas de 25 centavos e de 10 centavos.

Para um estudo geral de sistemas de equações lineares, necessitamos de algumas noções preliminares.

3- Conhecendo a Temática

3.1- Definição de Sistemas Lineares

Definição: Chama-se equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ toda equação sob a forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ são constantes reais.

Observação:

i) As constantes $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são chamadas de coeficientes enquanto a constante b é denominada termo independente.

ii) Se $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, denominaremos como equação homogênea.

Definição: Um sistema de equações lineares, ou simplesmente sistema linear ***m* x *n***, é um conjunto de ***m*** equações com ***n*** incógnitas da forma:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Lembrando da definição de produto de matrizes, notamos que o sistema linear *S* pode ser escrito na forma matricial

$$S:\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A matriz $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é chamada matriz principal do sistema e é formada pelos coeficientes de *S*.

O sistema *S* também pode ser representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | b_m \end{bmatrix}$$

denominada matriz ampliada do sistema *S*.

Ampliando o seu conhecimento...

A matriz dos coeficientes *C* e a matriz ampliada *A* serão bastante abordadas nas disciplinas de Cálculo Vetorial e Introdução à Álgebra Linear. Assim, sempre que você estiver lidando com sistemas tente visualizar tal sistema na forma matricial.

Exemplo 1: Uma herança de R$134.000,00 deve ser repartida entre três herdeiros, de maneira que o 1º receba mais R$40.000,00 do que o 2º, e este, mais R$ 20.000,00 do que o 3º. Qual a quota de cada herdeiro?

Solução: Seja *x, y* e *z*, respectivamente, o valor da quota que cada herdeiro deve receber.

Como o total da herança é de R$134.000,00 então $x + y + z = 134.000$, enquanto que $x = y + 40.000$ e $y = z + 20.000$.

Desta forma temos um sistema linear $(*)\begin{cases} x + y + z = 134.000 \\ x - y = 40.000 \\ y - z = 20.000 \end{cases}$ que é um sistema 3x3, que pode ser representada da forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134.000 \\ 40.000 \\ 20.000 \end{bmatrix}$ ou pela sua matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 134.000 \\ 1 & -1 & 0 & \vdots 40.000 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots 20.000 \end{bmatrix}.$$

Definição: Dado um sistema de equações lineares dizemos que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in IR$ é solução desse sistema quando $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ é solução de cada uma das equações do sistema.

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Nosso objetivo é apresentar uma solução aos problemas apresentados e assim passamos a um estudo mais detalhado de um sistema linear.

3.2- Classificação de um Sistema Linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções. Desta forma um sistema linear pode ser:

i) possível e determinado, ou seja, admite uma única solução;
ii) possível e indeterminado, ou seja, admite mais de uma solução;
iii) impossível, ou seja, não admite solução alguma.

Para ilustrar melhor a classificação de um sistema linear resolveremos alguns exemplos. Você com certeza já resolveu algum sistema linear 2x2 utilizando alguns métodos tais como adição, substituição e outros.

Exemplo 2: Primeiramente vamos retornar ao problema das moedas no caixa de Maria.

Chegamos ao seguinte sistema linear $\begin{cases} x + y = 250 & (I) \\ 0,25x + 0,10y = 40 & (II) \end{cases}$.

Pela equação (I) temos que $x = 250 - y$ e substituindo em (II) teremos $0,25(250 - y) + 0,10y = 40$, o que nos dá $y = 150$ e, pela equação (I), teremos $x = 100$.

Portanto, (100, 150) é o único par que é solução do sistema e assim dizemos que esse sistema é possível e determinado cuja solução é $x = 100$ e y = 150.

Observação: Este sistema possível e determinado é representado graficamente na forma:

$$\begin{cases} x + y = 250 & (I) \\ 0,25x + 0,10y = 40 & (II) \end{cases}.$$

Exemplo 3: Observe a representação geométrica das seguintes retas

$$r: y = \frac{x+5}{2} \;\; e \;\; s: y = \frac{2x-4}{4}.$$

Como as retas ***r*** e ***s*** são paralelas, o sistema $\begin{cases} -x+2y=5 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$ não possui nenhuma solução e assim dizemos que ele é um sistema impossível. Caso duas retas ***r*** e ***s*** sejam coincidentes, teremos infinitos pontos de intersecção e assim o sistema 2x2 formado pelas equações dessas duas retas seria um sistema possível e indeterminado.

Observação: Note que o sistema linear homogêneo

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

possui pelo menos a solução nula, ou seja, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Desta forma todo sistema homogêneo é um sistema possível, podendo ser determinado ou indeterminado.

3.3- Resolução de um Sistema Linear

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto solução do sistema. Dentre os vários métodos existentes para a resolução de um sistema, veremos inicialmente o método de resolução por escalonamento.

Método por escalonamento é considerado por muitos como sendo um processo longo e trabalhoso, o qual exige muita concentração e dedicação por parte dos alunos, bem como paciência e planejamento dos professores. No entanto, todos concordam que o método por escalonamento é o único que é capaz de resolver qualquer sistema linear, diferentemente de outros métodos considerados mais simples, os quais teremos a oportunidade de discutir posteriormente.

3.3.1- Sistemas Equivalentes

Definição: Dois sistemas lineares S_1 e S_2 são ditos equivalentes se, e somente se, admitem o mesmo conjunto solução.

Exemplo 4: Os sistemas lineares $S_1:\begin{cases} 3x+6y=42 \\ 2x-4y=12 \end{cases}$ e $S_2:\begin{cases} x+2y=14 \\ x-2y=6 \end{cases}$ são equivalentes porque admitem a mesma solução, a saber $x = 10$ e $y = 2$.

Observação: Observe que, se multiplicarmos a 1ª linha do sistema S_1 por 1/3 e a 2ª linha por 1/2, teremos o sistema linear S_2.

3.3.2- Sistemas Escalonados

Definição: Um sistema linear $S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ é dito escalonado se, e somente se:

i) todas as equações apresentam as incógnitas numa mesma ordem;
ii) em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não-nulo;
iii) existe uma ordem para as equações, tal que o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não-nulo de cada equação aumenta de uma equação para outra.

Exemplo 5: Os seguintes sistemas lineares estão escalonados.

$$a)\begin{cases} x+y+3z=1 \\ 0x+y-z=4 \\ 0x+0y+2z=5 \end{cases} \quad \text{matriz ampliada} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$b)\begin{cases} 4x-y+z+t+w=1 \\ 0x+0y+z-t+w=0 \\ 0x+0y+0z+2t-w=1 \end{cases} \quad \text{matriz ampliada} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$c)\begin{cases} 3x+4y=4 \\ 0x+5y=1 \end{cases} \quad \text{matriz ampliada} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6: O sistema linear $\begin{cases} 4x+3y+z=1 \\ 0x+5y-z=3 \\ 0x+3y-2z=5 \end{cases}$ não está escalonado, pois não satisfaz o item (iii) da definição.

Exemplo 7: O sistema $\begin{cases} 6x+y+3z=6 \\ 0x+4y+5z=4 \\ 0x+0y+0z=10 \end{cases}$ não está escalonado, pois a última equação

apresenta todos os coeficientes nulos. Na verdade observe que esse sistema não possui solução, pois não existem $x, y, z \in IR$ tais que 0 = 10. Portanto tal sistema é impossível.

Há apenas dois tipos de **sistemas escalonados** a considerar, conforme veremos a seguir:

1º Tipo: número de equações igual ao número de incógnitas.

Observe o sistema escalonado

$$\begin{cases} 3x+2y+z=3 & (I) \\ 0x+5y-2z=1 & (II) \\ 0x+0y+3z=6 & (III) \end{cases}.$$

Para resolver esse tipo de sistema, basta determinar o valor de *z* pela equação (III):

$$3z = 6 \;\Rightarrow\; z = 2.$$

Portanto, substituindo $z = 2$ na equação (II) encontramos o valor de y = 1 e, substituindo os valores determinados para y e z na equação (I), teremos x = –1/3 e o conjunto solução é $S = \{(-1/3;1;2)\}$.

Propriedade: Todo sistema linear **escalonado do primeiro tipo** é possível e determinado.

2º Tipo: número de equações menor que o número de incógnitas.

Observe o sistema escalonado

$$\begin{cases} x-y+z=4 \\ y-z=2 \end{cases}.$$

Para resolver tal sistema, podemos tornar as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas variáveis livres) e transpô-las para o segundo membro.

Desta forma teremos $\begin{cases} x - y = 4 - z \\ y = 2 + z \end{cases}$. Fazendo $z = \alpha$ (onde $\alpha \in IR$) obtemos $\begin{cases} x - y = 4 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \end{cases}$ e assim $x - (2 - \alpha) = 4 - \alpha \Rightarrow x = 6$.

Portanto, a solução do sistema é $x = 6$, $y = 2 + \alpha$ e $z = \alpha$, onde $\alpha \in IR$, e assim o sistema é possível e indeterminado.

Propriedade: Todo sistema linear escalonado do segundo tipo é possível e indeterminado.

Refletindo...

Porque devemos considerar apenas estes dois tipos de sistemas escalonados para classificar o sistema? O que aconteceria se num sistema escalonado tivesse o número de equações maior do que o número de incógnitas? Encontrar-nos-emos na plataforma Moodle para que juntos possamos compartilhar nossas reflexões.

A idéia principal do método do escalonamento é a seguinte: Dado um sistema linear S_1 determinar, a partir de S_1, um sistema S_2 equivalente a S_1, tal que a solução do sistema seja trivial.

Exercício: Classifique os sistemas lineares do exemplo 5 e, se possível, apresente uma solução.

Você deve estar se perguntando agora como se faz para escalonar um sistema linear *S*. Vamos agora estudar uma técnica para transforma um sistema linear *S* em um sistema escalonado. Essa técnica é fundamentada nos três teoremas que veremos a seguir:

TEOREMA 1: (Permutação) Permutando-se entre si duas ou mais equações de um sistema linear S_1, teremos um novo sistema S_2, que é equivalente a S_1.

PERMUTAÇÃO: Denotaremos esta operação da forma $L_i \leftrightarrow L_j$ (linha L_i permutada com a linha L_j).

TEOREMA 2: (Produto por escalar) Multiplicando-se (ou dividindo-se) ambos os membros de uma equação de um sistema linear S_1 por uma constante ***k***, com $k \neq 0$, obtém-se um novo sistema S_2 equivalente a S_1.

PRODUTO POR ESCALAR: Denotaremos esta operação da forma $L_i \leftrightarrow kL_i$ (linha L_i torna-se kL_i).

TEOREMA 3: (Substituição pela soma) Substituindo-se uma equação de um sistema linear S_1 pela soma, membro a membro, dela com outra equação desse sistema, obtém-se um novo sistema S_2, equivalente a S_1.

SUBSTITUIÇÃO PELA SOMA: Denotaremos esta operação da forma $L_i \rightarrow L_i + kL_j$ (linha L_i será substituída pela soma $L_i + kL_j$).

Faremos agora um exemplo de como podemos usar esses três teoremas para obter um sistema linear escalonado.

Exemplo 8: Vamos escalonar o seguinte sistema: $\begin{cases} x + 2y + z = 9 & (I) \\ 2x + y - z = 3 & (II) \\ 3x - y - 2z = -4 & (III) \end{cases}$

SOLUÇÃO:

Primeiramente volte no início da seção 3.3.2 e veja a definição de um sistema escalonado.

Temos:

(1º) $\begin{cases} x+2y+z=9 & (I) \\ 2x+y-z=3 & (II) \\ 3x-y-2z=-4 & (III) \end{cases}$ $L_2 \to L_2+(-2)L_1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15 \\ 3x-y-2z=-4 \end{cases}$

A operação $L_2 \to L_2+\left(-2\right)L_1$ significa que a linha L_2 foi substituída pela soma $L_2+\left(-2\right)L_1$, tal soma é *0x-3y-3z= -15.*

(2º) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15 \\ 3x-y-2z=-4 \quad L_3 \to L_3+(-3)L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15. \\ 0x-7y-5z=-31 \end{cases}$

A operação $L_3 \to L_3+\left(-3\right)L_1$ significa que a linha L_3 foi substituída pela soma $L_3+\left(-3\right)L_1$, tal soma é *0x – 7y – 5z = –31.*

(3º) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15 \quad L_2 \to (-\frac{1}{3})L_2 \\ 0x-7y-5z=-31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x-7y-5z=-31 \end{cases}.$

A operação $L_2 \to \left(-\frac{1}{3}\right)L_2$ significa que a linha L_2 foi substituída pela operação $\left(-\frac{1}{3}\right)L_2$. Tal operação vale *y + z = 5.*

(4º) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x-7y-5z=-31 \quad L_3 \to L_3+7.L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x+0y+2z=4 \end{cases}.$

A operação $L_3 \to L_3+7.L_2$ significa que a linha L_3 foi substituída pela soma $L_3+7.L_2$, cujo resultado é *0x + 0y + 2z = 4.*

O sistema linear $S_2 : \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x+0y+2z=4 \end{cases}$ está na forma escalonada e é um sistema equivalente ao sistema S_1, ou seja, a solução de S_2 é também solução de S_1.

Pela terceira equação, $2z = 4$, teremos $z = 2$ e assim, substituindo nas demais equações, teremos $x = 1$ e $y = 3$, e desta forma o sistema S_1 é um sistema possível e determinado cuja solução é $x = 1, y = 3$ e $z = 2$.

Exemplo 9: Vamos escalonar o sistema

$$S : \begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 3x+3y+z+2t=0. \\ 2x+y+z-2t=4 \end{cases}$$

Solução:

Vamos, inicialmente, conseguir os zeros necessários nos coeficientes de *x*.

$$\begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 3x+3y+z+2t=0 \;\; L_2 \to L_2+(-3)L_1 \\ 2x+y+z-2t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 0x+0y+10z-t=-3 \\ 2x+y+z-2t=4 \quad L_3 \to L_3+(-2)L_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 0x+0y+10z-t=-3 \\ 0x-y+7z-4t=2 \end{cases}$$

Vamos agora permutar $L_2 \leftrightarrow L_3$ e assim teremos $\begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 0x-y+7z-4t=2 \\ 0x+0y+10z-t=-3 \end{cases}$ o qual é um sistema escalonado. Como este sistema é do 2º tipo (número de equações menor que o de incógnitas), segue-se que é possível e indeterminado.

Se fizermos $t=\alpha$ teremos

$$x=\frac{2+26\alpha}{10},\; y=\frac{-1-33\alpha}{10},\; z=\frac{-3+\alpha}{10} \text{ e } t=\alpha, \text{onde } \alpha \in IR.$$

Exemplo 10: Vamos escalonar o sistema:

$$S_1 : \begin{cases} x-y+z=4 \\ 3x+2y+z=0 \\ 5x+5y+z=-4 \end{cases}$$

Solução:

Temos

$$\begin{cases} x-y+z=4 \\ 3x+2y+z=0 \;\; L_2 \to L_2+(-3)L_1 \\ 5x+5y+z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=4 \\ 0x+5y-2z=-12 \\ 5x+5y+z=-4 \quad L_3 \to L_3+(-5)L_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z=4 \\ 0x+5y-2z=-12 \\ 0x+10y-4z=-24 \;\; L_3 \to L_3+(-2)L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=4 \\ 0x+5y-2z=-12 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}.$$

A última equação de S_2 pode ser abandonada, pois ela é satisfeita para quaisquer valores de *x, y* e *z*.

Desta forma $S_2 \begin{cases} x-y+z=4 \\ 0x+5y-2z=-12 \end{cases}$ e fazendo $z=\alpha$ teremos a solução: $x=\frac{8-3\alpha}{5}, y=\frac{-12+2\alpha}{5} \; e \; z=\alpha$, onde $\alpha \in IR$ e assim o sistema S_1 é possível e indeterminado.

Observação:

I) Se, ao escalonarmos um sistema, ocorrer uma equação do tipo $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=0$ esta deverá ser suprimida do sistema.

II) Se, ao escalonarmos um sistema, ocorrer uma equação do tipo $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=b$, (com $b \neq 0$) o sistema será, evidentemente, impossível.

No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo este conteúdo. Acesse e participe!

4- Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade você teve a oportunidade de conhecer e classificar sistemas lineares bem como discutir as propriedades utilizadas na resolução de um sistema linear. Através dos exercícios disponibilizados na plataforma Moodle, praticamos e amadurecemos no que diz respeito à resolução de problemas de sistemas lineares.

5- Bibliografia

1. DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª** ed. São Paulo: Ática. Vol. 1. 2000.

2. IEZZI, G. Dolce, O. Hazzan, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 1, Editora Atual, 8 ª ed. 2004.

3. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: conceito linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna. Vol. 2. 2002.

4. FACCHINI, Walter. **Matemática para Escola de Hoje**. São Paulo: FTD, 2006.

5. LIMA, Elon L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 3, 2ª Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.